

БР 385

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

---

препринт

И.Н.Мешков, Б.В.Чириков

фокусировка интенсивного электронного  
пучка в ускорительной трубке

НОВОСИБИРСК 1965

БР  $\frac{99}{385}$

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

И.Н.Мешков, Б.В.Чириков

ФОКУСИРОВКА ИНТЕНСИВНОГО ЭЛЕКТРОННОГО  
ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЬНОЙ ТРУБКЕ

Новосибирск  
1965

В настоящей работе рассмотрено прохождение интенсивного электронного пучка через прямолинейную ускорительную трубку. Одной из основных задач при этом является фокусировка пучка, т.е. обеспечение небольших поперечных размеров пучка и малой угловой расходимости. Вопросам фокусировки электронных пучков посвящено большое количество работ (см., например / 1 /, однако, насколько нам известно, до сих пор не рассматривалась динамика релятивистского пучка с учетом собственного поля и при наличии продольного ускоряющего поля.

### §1. Уравнения движения.

Исходим из уравнений движения ( $e = \bar{m} = c = 1$ )<sup>+</sup>

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dz}{dt} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} ; \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dy}{dt} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f ; \quad \beta^2 = \dot{z}^2 + \dot{y}^2$$

где  $y$  - поперечная координата (рис.1),  $\varphi$  - электростатический потенциал внешнего поля (с обратным знаком), подчиняющийся уравнению  $\Delta \varphi = 0$  и определяемый граничными условиями на ускоряющих электродах;  $f$  - сила, связанная с объемным зарядом, и равная разности электростатического расталкивания  $f_E$

<sup>+</sup>) Приводим перевод некоторых единиц из системы ( $e = \bar{m} = c = 1$ ) в практическую:  $\varphi_1 = \bar{m}c^2/e \approx 5 \cdot 10^5$  вольт;  $J_1 = \bar{m}c^3/e \approx 17000$  ампер;  $W_1 = \bar{m}c^2 \approx 5 \cdot 10^5$  эв.

и магнитного стягивания  $f_H = -f_E \cdot \dot{z}^2$ . Результирующая сила

$$f = f_E (1 - \dot{z}^2) \approx f_E / \gamma^2 \quad (I.2)$$

Заметим, что обычно используемое последнее приближенное выражение справедливо лишь при  $\dot{y}^2 \ll 1 - \dot{z}^2$ , т.е. при  $\theta \ll 1/\gamma$ , где  $\theta$  - угол наклона траекторий электрона к оси пучка.

В дальнейшем будем рассматривать два случая: аксиально-симметричную (I) и ленточную (II) геометрию. Как обычно / I /, будем считать пучок "ламинарным" (отсутствуют пересечения траекторий) и достаточно резко ограниченным в поперечном направлении. Тогда можно рассмотреть движение только граничного электрона, для которого

$$(I) f_E = \frac{2J}{\gamma\beta} ; \quad (II) f_E = \frac{2\pi J}{\beta} \quad (I.3)$$

где  $J$  - полный ток пучка, а  $\beta$  - ширина ленточного пучка.

В уравнениях (I.1), мы не учитываем продольной составляющей сил пространственного заряда. Это допустимо при условии, что разность потенциалов за счет объемного заряда ( $\varphi^*$ ) много меньше кинетической энергии электронов  $W = \gamma - 1$ :

$$\frac{\varphi^*}{W} \sim \frac{J}{W\beta} \approx \frac{W+1}{\sqrt{W+2}} \cdot \frac{J}{W^{3/2}} \ll 1 \quad (I) \quad (I.4)$$

$$\frac{\varphi^*}{W} \sim \frac{W+1}{\sqrt{W+2}} \cdot \frac{J}{W^{3/2}} \cdot \frac{y_0}{\beta} \ll 1. \quad (II)$$

где  $y_0$  - апертура ускорительной трубки (рис. I).

Уравнение траекторий следует из (I.1) и имеет вид (для случая I):

$$\frac{\varphi(\varphi+2)}{(\varphi+1)} \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dy}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{2J}{y(1+\varphi)\sqrt{\varphi(\varphi+2)}} \quad (I.4)$$

где  $\varphi$  выбрано равным кинетической энергии. В случае II в последнем слагаемом нужно произвести замену  $y \rightarrow v/\pi$  (I.3).

Вместо  $z$  вводим независимую переменную  $u$  по формуле

$$\varphi(z) = \operatorname{ch} u - 1 \quad (I.5)$$

Уравнение (I.4) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \frac{d^2 y}{du^2} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \cdot \operatorname{sh} u - \operatorname{ch} u \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2J}{y \operatorname{sh} u} \quad (I.6)$$

Заметим, что замена переменных (I.5) применима только при дополнительном условии взаимно-однозначного соответствия между  $z$ ,  $u$ , которое может нарушаться, если потенциал  $\varphi(z)$  содержит большую переменную составляющую (см. § 4). Преобразование (I.5) полезно, если ускоряющее поле является почти однородным, так что  $\partial \varphi / \partial z \approx \operatorname{const}$ , а  $\partial^2 \varphi / \partial z^2$  - мало.

## § 2. Пучок без ускорения

В уравнении (I.4)  $\varphi = \gamma - 1 = \operatorname{const}$ :

$$y \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{2J}{[\varphi(\varphi+2)]^{3/2}} = 2A^2 \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения имеет вид / I / :

$$A \frac{z - z^*}{y^*} = \int_0^{\sqrt{\ln y/y^*}} e^{t^2} dt \quad (2.2)$$

где  $y^*$  - значение  $y(z^*)$ , при котором  $y' = 0$ . Оказывается, что в практически интересных случаях решение (2.2) может быть аппроксимировано с хорошей точностью решением линеаризованного уравнения

$\eta'' = 2A^2/y_n$ , где  $y_n$  - начальное значение  $y = y(0)$ ;  $\eta = y - y_n \ll y_n$ . Решение имеет вид:

$$y \approx y_n + \left(\frac{dy}{dz}\right)_n \cdot z + \frac{A^2 z^2}{y_n} \quad (2.3)$$

На рис.2 представлены оба решения для случая  $y'_n = 0$ . Если нас удовлетворяет точность в 10%, то формулу (2.3) можно применять до  $y = 2,5 y^*$ . При больших  $y/y^*$  точное решение (2.2) можно аппроксимировать линейной зависимостью (прямая на рис.2):

$$z = 0.60 + 0.37 (y/y^*) \quad (2.4)$$

Наибольшая ошибка в месте перехода от (2.3) к (2.4) при  $(y/y^*) \approx 3$  составляет около 15%.

Для ленточного пучка (случай II) уравнение (2.1) принимает вид (1.3,4):

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{2\pi A^2}{b}; \quad A = \frac{\sqrt{y}}{[\varphi(\varphi+2)]^{3/4}} \quad (2.5)$$

Отсюда:

$$y = y_n + \left(\frac{dy}{dz}\right)_n \cdot z + \frac{\pi A^2 z^2}{b} \quad (2.6)$$

По кривой  $Z (y/y^*)$  на рис. 2 можно рассчитывать расширение пучка для частного случая, когда вначале пучок является параллельным. В общем случае для расчета движения пучка необходимо знать угол наклона траектории крайнего электрона  $\theta \approx \frac{dy}{dz} = 2A \sqrt{\ln y/y^*}$ . Эта зависимость отложена на рис. 3 вместе с функцией  $Z (y/y^*)$ . Порядок расчета следующий: по начальному углу наклона траектории и начальному размеру пучка определяем из кривой  $\theta (y/y^*)$  наименьший размер пучка  $y^*$  для данного случая, а из кривой  $Z (y/y^*)$  его положение ( $Z^*$ ). Затем, пользуясь кривой  $Z (y/y^*)$ , вычисляем дальнейшее расширение пучка. Напомним, что пучок является симметричным относительно  $Z^*$ .

### § 3. Ускорение в однородном поле

Уравнение (I.6) принимает в этом случае вид ( $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_0 = \text{const}$ ):

$$y \frac{d^2 y}{du^2} = \frac{2J}{E_0^2 \text{sh} u} = \frac{2B}{\text{sh} u} \quad (3.1)$$

Линеаризуя это уравнение, получаем:

$$\frac{d^2 \eta}{du^2} = \frac{2B}{y_n \text{sh} u} \quad (3.2)$$

Откуда

$$y \approx y_n + \left( \frac{dy}{du} \right)_n (u - u_n) + \frac{2B}{y_n} \int_{u_n}^u \ln \text{th} \frac{u}{2} du - \frac{2B}{y_n} (u - u_n) \ln \text{th} \frac{u_n}{2} \quad (3.3)$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{\theta}{E} \sqrt{\varphi(\varphi+2)}$$

Графики функций  $-\ln \operatorname{th} \frac{u}{2}$  и  $-\int_0^u \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} dx$  приведены на рис. 5. При  $u, u_n \ll 1$  приближенно получаем:

$$y - y_n \approx \frac{2B}{y_n} u_n \ln \frac{u}{u_n} + (u - u_n) \left\{ \left( \frac{dy}{du} \right)_n + \frac{2B}{y_n} \left( \ln \frac{u}{u_n} - 1 \right) \right\} \quad (3.4)$$

При  $u \gg 1$ , но  $u_n \ll 1$  имеем:

$$y - y_n \approx 4.91 \frac{B}{y_n} + (u - u_n) \left\{ \left( \frac{dy}{du} \right)_n + \frac{2B}{y_n} \ln \frac{2}{u_n} \right\} \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) видно, что эффект пространственного заряда выражается в виде добавки к начальному углу расходимости:

$$\delta\theta \approx \frac{2B}{E_0 y_n} \sqrt{\varphi_n(\varphi_n+2)} \times \begin{cases} \ln \frac{u}{u_n} - 1; & u \ll 1 \\ \ln \frac{2}{u_n}; & u \gg 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

и начальному размеру пучка

$$\delta y_n \approx \frac{2y}{E_0^2 y_n} \times \begin{cases} u_n \ln \frac{u}{u_n}; & u \ll 1 \\ 4.91 \frac{B}{y_n}; & u \gg 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Для ленточного пучка (случай II, § I) решение (3.3) является точным, причем в правых частях формул (3.2 + 7) вместо  $y_n$  необходимо подставить величину  $b/\pi$ .

#### § 4. Фокусировка пучка периодическим полем

Будем исходить из уравнения (1.6). Примем, что вблизи оси ( $ky \ll 1$ ) электростатический потенциал имеет вид (см. § 5):

$$\varphi(z) = E_0 z + \varepsilon \left( 1 + \frac{k^2 y^2}{4} \right) \cos kz \quad (4.1)$$



В соответствии с выбором потенциала в § I точка  $z = 0$  выбирается таким образом, чтобы  $E_0 z = \gamma - 1$  (см. также § 5). Постоянная  $\varepsilon$  считается малой ( $\varepsilon \ll \varphi$ ) и определяется граничными условиями (см. § 5). Уравнение (I.6) с точностью до  $\varepsilon^2$  принимает вид:

$$\frac{d^2 \gamma}{dz^2} - \frac{d\gamma}{dz} \frac{\varepsilon k^2 \cos kz}{E_0^2 (1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz)} \operatorname{sh} u -$$

$$- \gamma \frac{\varepsilon k^2 \cos kz}{2E_0^2 (1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz)} \operatorname{ch} u = \frac{2\gamma}{\gamma E_0^2 (1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz) \operatorname{sh} u} \quad (4.2)$$

Связь  $z$  и  $u$  дается выражением (I.5):

$$\operatorname{ch} u = 1 + E_0 z + \varepsilon \cos kz \quad (4.3)$$

Для взаимно-однозначного соответствия переменных  $z, u$  необходимо, чтобы  $E_0 > \varepsilon k$ . Иными словами формулы этого параграфа неприменимы при очень слабом ускоряющем поле (см. § 2). Примем, что  $k \gg E_0$ , т.е. переменная  $u$  мало изменяется на расстоянии  $k^{-1}$ . В этом случае уравнение (4.2) можно решать методом усреднения / 2 /. Для этого представляем величину  $\gamma$  в виде суммы двух слагаемых: медленно изменяющегося ( $\gamma$ ) и малого, но быстро (так как  $k \gg E_0$ ) осциллирующего ( $\eta$ ), т.е.  $\gamma \rightarrow \gamma + \eta$  ( $\eta \ll \gamma$ ). Подставляя это выражение в (4.2), производим разделение уравнения на медленную (4.4) и осциллирующую (4.5) части, которые должны равняться нулю независимо. Первое уравнение получается усреднением (4.2) по быстрым осцилляциям

$$y'' - \frac{\varepsilon \kappa^2}{E_0^2} \left( y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right) \overline{\operatorname{Cos} \kappa z} - \frac{4 \varepsilon \kappa^2}{y E_0^3 \operatorname{sh} u} \overline{\operatorname{Sin} \kappa z} -$$

$$- \frac{\varepsilon \kappa^2}{E_0^2} \left( \operatorname{sh} u \cdot \overline{y' \operatorname{Cos} \kappa z} + \frac{\operatorname{ch} u}{2} \overline{y \operatorname{Cos} \kappa z} \right) = \frac{2\gamma}{y E_0^2 \operatorname{sh} u} \quad (4.4)$$

Это уравнение написано с точностью до членов  $\sim \varepsilon^2$ ; черта означает усреднение по переменной  $u$ . Уравнение для  $\eta$  содержит все осциллирующие слагаемые (4.2) после подстановки в него  $y + \eta$ . С точностью до членов  $\sim \varepsilon$  уравнение имеет вид:

$$\eta'' + \frac{2\gamma}{y^2 E_0^2 \operatorname{sh} u} \eta = \frac{\varepsilon \kappa^2}{E_0^2} \left( y' \operatorname{sh} u + \frac{y \operatorname{ch} u}{2} \right) \operatorname{Cos} \kappa z \quad (4.5)$$

В соответствии с принятым выше условием  $\kappa \gg E_0$  величины  $\operatorname{sh} u$  и  $\operatorname{ch} u$  в уравнениях (4.4, 5) считаются постоянными. Частота функции  $\operatorname{Cos} \kappa z$  по переменной  $z$  равна (4.3):

$$\frac{d(\kappa z)}{du} = \frac{\kappa \operatorname{sh} u}{E_0 - \varepsilon \kappa \operatorname{Sin} \kappa z} \approx \frac{\kappa \operatorname{sh} u}{E_0} \equiv \kappa \left( \frac{dz}{du} \right)_0 \quad (4.6)$$

С точностью  $\sim \varepsilon$  решение уравнения (4.5) есть:

$$\eta = - \frac{\varepsilon \left( y' \operatorname{sh} u + \frac{y \operatorname{ch} u}{2} \right) \operatorname{Cos} \kappa z}{\operatorname{sh}^2 u \left( 1 - \frac{2\gamma}{\kappa^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)} \quad (4.7)$$

Это выражение необходимо подставить в (4.4) и произвести усреднение; имеем:

$$\overline{y' \operatorname{Cos} \kappa z} \sim \overline{\operatorname{Sin} \kappa z \operatorname{Cos} \kappa z} = 0; \quad |$$

$$\overline{y \operatorname{Cos} \kappa z} = - \frac{\varepsilon \left( y' \operatorname{sh} u + \frac{y \operatorname{ch} u}{2} \right)}{\operatorname{sh}^2 u \left( 1 - \frac{2\gamma}{\kappa^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)} \overline{\operatorname{Cos}^2 \kappa z} = - \frac{\varepsilon \left( y' \operatorname{sh} u + \frac{y \operatorname{ch} u}{2} \right)}{2 \operatorname{sh}^2 u \left( 1 - \frac{2\gamma}{\kappa^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)} \quad (4.8)$$

Так как уравнение (4.4) написано с точностью  $\sim \varepsilon^2$ , а  $y \sim \varepsilon$ , то усреднение в (4.8) достаточно провести в нулевом приближении по  $\varepsilon$ , тогда усреднение по  $z$  или по  $u$  приводит к одинаковому результату. Однако при вычислении  $\overline{\cos kz}$  это уже не так: чтобы получить общую точность  $\sim \varepsilon^2$ , усреднение необходимо провести с точностью  $\sim \varepsilon$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\cos kz}^u &= \frac{1}{T_u} \int_0^{T_u} \cos kz \frac{du}{dz} dz = \frac{T_z}{T_u} \overline{\cos kz \cdot \frac{du}{dz}}^z \\ &= \frac{T_z}{T_u} \left( \frac{du}{dz} \right)_0 \overline{\cos kz \left( 1 - \frac{\varepsilon k}{E_0} \sin kz \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u} \varepsilon \cos kz \right)}^z = - \frac{\varepsilon \operatorname{ch} u}{2 \operatorname{sh}^2 u} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь  $T_z, T_u$  - периоды быстрых осцилляций по  $z$  и  $u$ , соответственно. Ввиду неравенства  $k \gg E_0$   $T_z/T_u \approx \left( \frac{du}{dz} \right)_0$  с точностью  $\sim \varepsilon^0$ . Аналогично:

$$\overline{\sin kz}^u = - \frac{\varepsilon k}{2 E_0} \quad (4.10)$$

Из (4.4, 8, 9, 10) получаем:

$$\begin{aligned} y'' + \frac{3}{8} \left( \frac{\varepsilon k}{E_0} \right)^2 \operatorname{sh} u (2y' + y \operatorname{cth} u) \frac{1 - \frac{4y}{3k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u}}{1 - \frac{2y}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u}} &= \\ = \frac{2y}{y E_0^2 \operatorname{sh} u} \left( 1 - \frac{\varepsilon^2 k^2}{E_0^2} \right) & \quad (4.11) \end{aligned}$$

Для сравнения полученного уравнения с работами / 3, 4 / необходимо перейти к случаю  $E_0 = 0$ . Как было отмечено выше прямой переход невозможен ввиду условия  $E_0 > \varepsilon k$ . Однако можно показать,

что применяя аналогичную процедуру усреднения непосредственно к (I.I), получим при  $E_0 = 0$  уравнение:

$$\ddot{y} + \frac{3}{8} y \frac{(\varepsilon k)^2}{\gamma^2 \beta^2} \cdot \frac{1 - \frac{47}{3(ky)^2(\beta\gamma)^3}}{1 - \frac{27}{(ky)^2(\beta\gamma)^3}} = \frac{27}{\gamma\beta\gamma^3} \quad (4.I2)$$

В этом уравнении член  $\sim y$  характеризует среднюю фокусирующую силу в периодическом поле. Полученное для нее выражение совпадает (за исключением резонансного множителя  $(1 - 47/3(ky)^2(\beta\gamma)^3)/(1 - 27/(ky)^2(\beta\gamma)^3)$  с результатом работы / 3 / (при переходе к нерелятивистскому случаю) и не совпадает с результатом / 4 /. В последней работе ошибочно пренебрегается осцилляциями продольной скорости частиц, что приводит к уменьшению фокусирующей силы в 3 раза. Эта ошибка повторена в / I /. Что касается резонансного множителя, то он практически несущественен. Действительно, для пучка без ускорения, резонанс мог бы работать лишь в том случае, если пучок не расплывается, так как в противном случае изменение  $y$  нарушает условие резонанса. Это значит, что расплывание пучка должно компенсироваться фокусирующей силой, т.е. должно быть:

$$\varepsilon^2 = \frac{16}{3} \frac{\gamma}{(ky)^2} \frac{\beta}{\gamma} \quad (4.I3)$$

Отсюда резонансный знаменатель  $1 - \frac{27}{(ky)^2(\beta\gamma)^3} = 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon}{\gamma\beta^2}\right)^2 \approx 1$

так как  $\gamma\beta^2 \sim \varphi \gg \varepsilon$  (см. выше).

Член  $\sim y'$  в (4.II) характеризует затухание колебаний пучка, связанное с ускорением электронов; при переходе к случаю  $E_0 = 0$  затухание исчезает (см. также (I.4)). Уменьшение

действию объемного разряда (множитель  $(1 - (\frac{\epsilon k}{E_0})^2)$  в (4.11) также связано с ускорением (см. (4.12)). Этот эффект мал в силу неравенства  $\epsilon k \ll E_0$ , которое необходимо для преобразования знаменателя в (4.2), и в дальнейшем не учитывается.

В силу сделанных выше замечаний уравнение (4.11) принимает вид:

$$y'' + \frac{3}{8} \left(\frac{\epsilon k}{E_0}\right)^2 \operatorname{cthu} (2y' + y \operatorname{cthu}) = \frac{2J}{y E_0^2 \operatorname{shu}} \quad (4.14)$$

Рассмотрим квазистационарный случай ( $y'' \approx y' \approx 0$ ), когда имеет место соотношение (4.13). При заданном  $\epsilon$  это соотношение определяет зависимость размера пучка  $y$  от энергии электронов. Максимальный размер пучка соответствует  $\gamma = \sqrt{2}$  ( $W = (\gamma - 1) m c^2 \approx 200 \text{ кэВ}$ ) и равен:

$$(ky)_{\max}^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{J}{\epsilon^2} \quad (4.15)$$

Для квазистационарности необходимо, чтобы период колебаний пучка из (4.14) был бы много меньше времени ускорения ( $\Delta u \sim 1$ ), т.е. должно быть:

$$\frac{\epsilon k}{E_0} \operatorname{cthu} \gg 1 \quad (4.16)$$

Это условие может выполняться лишь в нерелятивистском случае ( $u \ll 1$ ). Невыполнение неравенства (4.16) означает наличие колебаний пучка вокруг равновесного значения (4.13). Эти колебания затухают из-за своеобразного "трения" (член  $\sim y'$  в (4.14)),

связанного с ускорением электронов. С другой стороны в нерелятивистском случае амплитуда колебаний растет в связи с уменьшением частоты:  $y \sim \sqrt{u}$ . Последний процесс оказывается более сильным, чем затухание, декремент которого  $\sim \frac{(\epsilon k)^2}{E_0} / u \ll 1$ , если не выполнено условие (4.16).

Нетрудно видеть, что для перехода к ленточной геометрии необходимо произвести замену  $\mathcal{H}/y \rightarrow \mathcal{H}/v$ , а также положить резонансный множитель и множитель  $(1 - (\frac{\epsilon k}{E_0})^2)$  равными единице.

### § 5. Расчет периодического поля в ускорительной трубке

Коэффициент  $\xi$ , характеризующий фокусировку периодическим полем, определяется граничными условиями, заданными на электродах ускорительной трубки. Мы ограничимся простейшим случаем одинаковых электродов, расположенных на равном расстоянии друг от друга и с одинаковой разностью потенциалов между ними (рис. I). В соответствии с этими условиями электрическое поле в трубке представим в виде суперпозиции однородного ускоряющего поля и периодического:

$$\varphi(y, z) = E_0 z + \varphi_{\sim}(y, z) \quad (5.1)$$

Решение уравнения  $\Delta \varphi_{\sim} = 0$  в случае цилиндрической геометрии есть / 4 / (см. (5.3) ):

$$\varphi_{\sim}(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n I_0((2n+1)k_0 y) \cos((2n+1)k_0 z) \quad (5.2)$$

где  $I_0(x) = J_0(ix)$ , — функция Бесселя мнимого аргумента ;  
 $k_0 = \pi/l$ . Коэффициенты  $C_n$  определяются из граничных условий,  
 которые наиболее удобно рассмотреть при  $y = y_0$  (рис. I).  
 Наиболее простым способом создания переменного поля в ускорительной трубке является попарное замыкание соседних ускоряющих электродов; ход потенциала при  $y = y_0$  показан для этого случая на рис. 7а. Граничные условия для периодической части потенциала показаны на рис. 7б. При малой толщине электродов по сравнению с  $l$  функцию  $\varphi_2(y_0, z)$  можно считать пилообразной с наклоном  $\pm E_0$ . Разлагая её в ряд Фурье:

$$\varphi_2(y_0, z) = -\frac{E_0 l}{2} + \frac{4E_0}{\pi k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)k_0 z}{(2n+1)^2} \quad (5.3)$$

и подставляя в (5.2), находим коэффициенты  $C_n$  и решение:

$$\varphi_2(y, z) = -\frac{E_0 l}{2} + \frac{4E_0}{\pi k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_0((2n+1)k_0 y)}{I_0((2n+1)k_0 y_0)} \cdot \frac{\cos(2n+1)k_0 z}{(2n+1)^2} \quad (5.4)$$

Постоянное слагаемое  $-E_0 l/2$  относим к члену  $E_0 z$ , передвинув соответствующим образом начало отсчета:  $z \rightarrow z - l/2$ .

При  $k_0 y_0 \gg 1$  (часто расположенные электроды с большой апертурой)  $I_0 \approx \exp((2n+1)k_0 y_0) / \sqrt{2\pi(2n+1)k_0 y_0}$ . Сравнивая (5.4) и (4.1), находим:

$$(\varepsilon k)^2 = \frac{16 E_0^2}{\pi^2 I_0^2(k_0 y_0)} \approx \frac{32}{\pi} E_0^2 k_0 y_0 e^{-2k_0 y_0} \quad (5.5)$$

В этом случае существенна только первая гармоника потенциала. Если, наоборот,  $k_0 y_0 \ll 1$ , то потенциал (4.1) будет представлять из себя сумму многих гармоник. Нетрудно проследить, что в окончательную формулу (4.14) вместо  $(\varepsilon k)$  нужно подставить величину

$$\begin{aligned} (\varepsilon k)_{\text{эф}}^2 &= \frac{16}{\pi^2} E_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} I_0^{-2}((2n+1)k_0 y_0) = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} E_z^2(0, z) dz \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $E_z$  - переменное электрическое поле на оси. Выражение  $(\varepsilon k)_{\text{эф}}^2$  является универсальной функцией безразмерного аргумента  $k_0 y_0$ , которая приведена на рис. 8 (кривая I).

Все проведенные в работе расчеты справедливы при условии  $(k_0 y_0)^2 \ll 1$ , когда апертура электродов существенно больше размера пучка.

В случае ленточной геометрии поле во всем объеме трубки будем считать двумерным, т.е.  $b \gg y_0$ . В таком случае во всех формулах этого параграфа необходимо произвести замену  $I_0(x) \rightarrow \text{ch} x$ . График зависимости  $(\varepsilon k)_{\text{эф}}^2$  от  $k_0 y_0$  для этого случая также приведен на рис. 8 (кривая II).

При  $k_0 y_0 \gg 1$  имеем, в частности,

$$(\varepsilon k)_{\text{эф}}^2 \approx \frac{32}{\pi^2} E_0^2 e^{-2k_0 y_0} \quad (5.7)$$

Если же  $k_0 y_0 \rightarrow 0$ , то  $(\varepsilon k)_{\text{эф}}^2 / E_0^2$  достигает максимального значения, одинакового для обеих геометрий и равного:

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} \approx 1.95. \text{ Такое большое значение недопустимо}$$

ввиду условия  $\varepsilon k \ll E_0$ , использованного в § 4. Фактически необходимо, чтобы это неравенство выполнялось для наибо -



лее сильной первой гармоники. На границе применимости ( $\varepsilon k \approx E_0$  для  $n = 1$ )  $(k_0 y_0)_{\text{min}} \approx 0,72$  и  $(\varepsilon k)_{\text{эф}}^2 / E_0^2 \approx 1$  для ленточной геометрии; для цилиндрической геометрии  $(k_0 y_0)_{\text{min}} \approx 1,0$  и  $(\varepsilon k)_{\text{эф}}^2 / E_0^2 \approx 1$ .

Оценим предельное значение  $\varepsilon$  с точки зрения устойчивости периодической фокусировки. Согласно формулы (4.4, 8, 9) фокусирующая сила пропорциональна множителю  $\cos^2 kz$ , для которого в окончательном уравнении принято среднее значение  $1/2$ . Если вместо этого использовать точное значение  $\cos^2 kz = \frac{1}{2}(1 + \cos 2kz)$ , то вместо (4.14) получим уравнение Матье:

$$y'' + \frac{3}{8} \left( \frac{\varepsilon k}{E_0} \operatorname{cth} u \right)^2 (1 + \cos 2kz) y = 0 \quad (5.8)$$

Члены с  $y$  и  $y'$  для простоты опущены, а  $\operatorname{cth} u$  считается постоянным согласно неравенству  $k \gg E_0$  (§ 4). Принимая во внимание значение частоты (4.6), получим условие устойчивости в I-й зоне в виде / 5 /:

$$\varepsilon < \frac{4}{3} \frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch} u} \quad (5.9)$$

Из полученных выше максимальных значений  $(\varepsilon k)_{\text{эф}}^2$  и формулы (4.15) следует выражение для предельного тока, который может ускоряться в трубке, не расплываясь:

$$J \approx \frac{3}{8} (E_0 y)^2 \quad (5.10)$$

Если принять  $E_0 \sim 10^4$  в/см и  $y \sim 1$  см, получаем  $J \sim 2$  ампер.

Авторы выражают благодарность Е.А.Абрамяну за ценные дискуссии, И.Д.Багбая и А.Г.Борискину за помощь в работе.

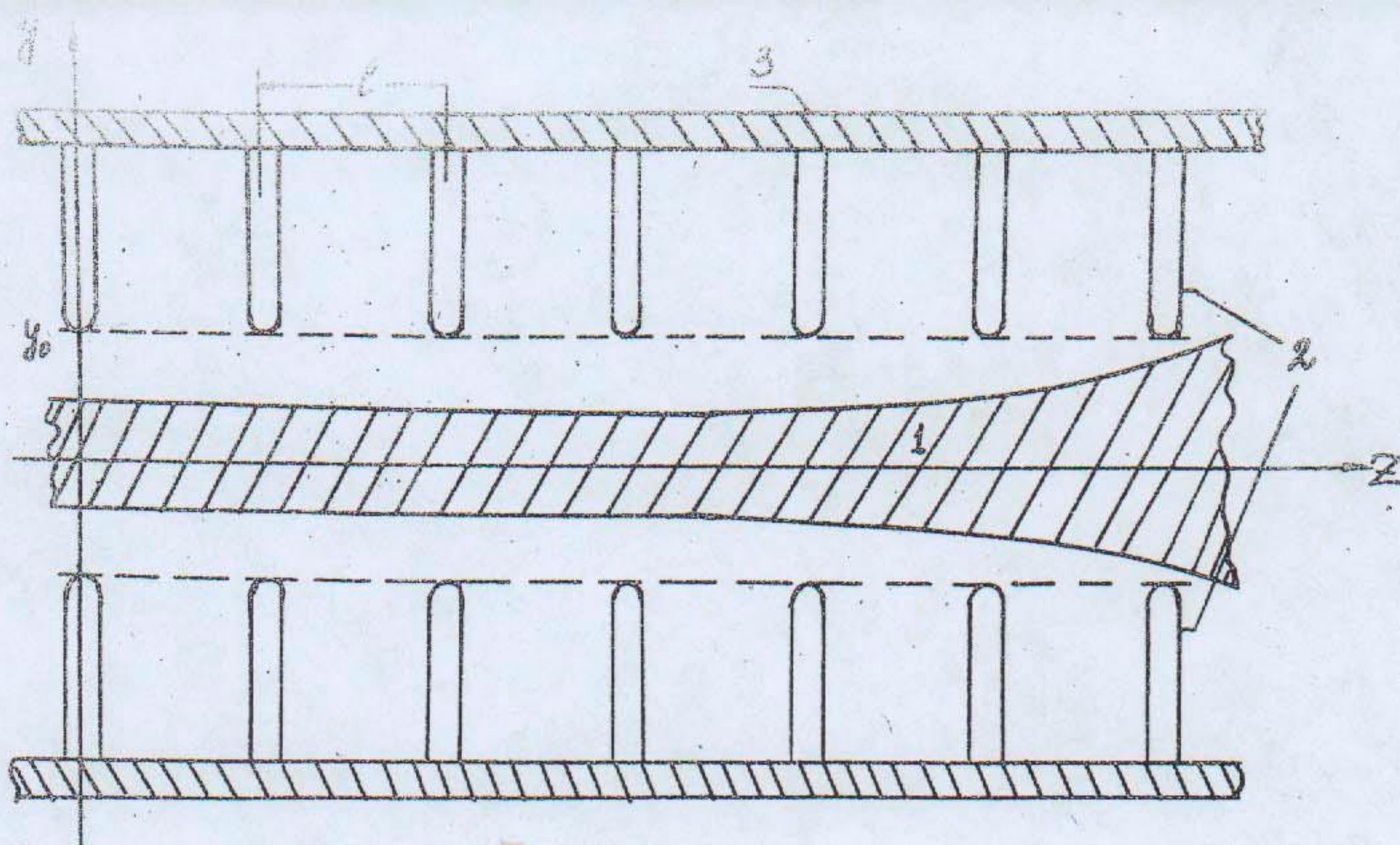


Рис. 1. Схема ускорительной трубки: 1 - электронный пучок; 2 - ускоряющие электроды; 3 - изолятор;  $y_0$  - половина апертуры трубки;  $l$  - расстояние между электродами.

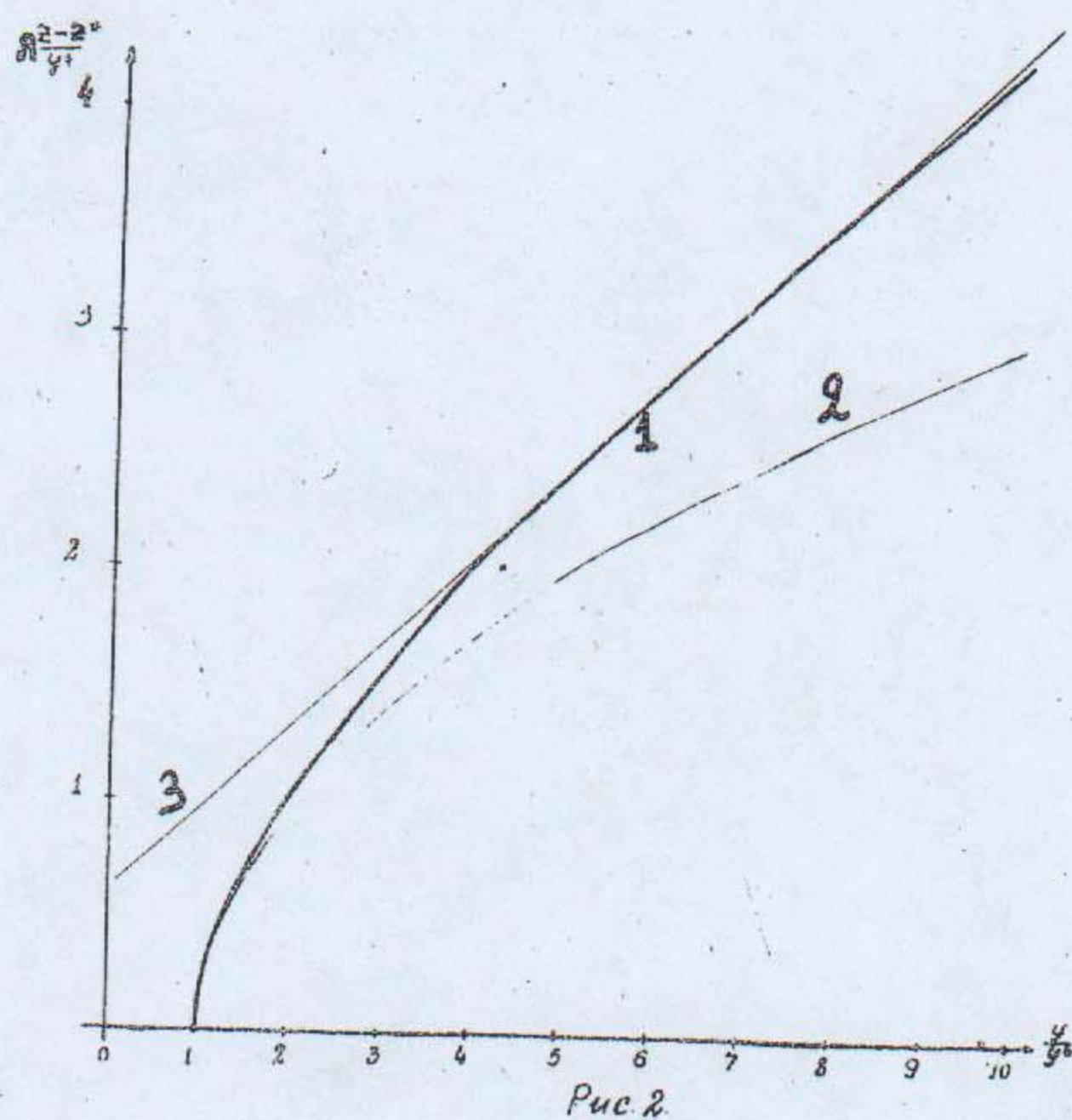


Рис. 2. Расширение пучка без ускорения: 1 - точное решение (2.2); 2 - решение в линейном приближении (2.3); 3 - приближенное решение (2.4).

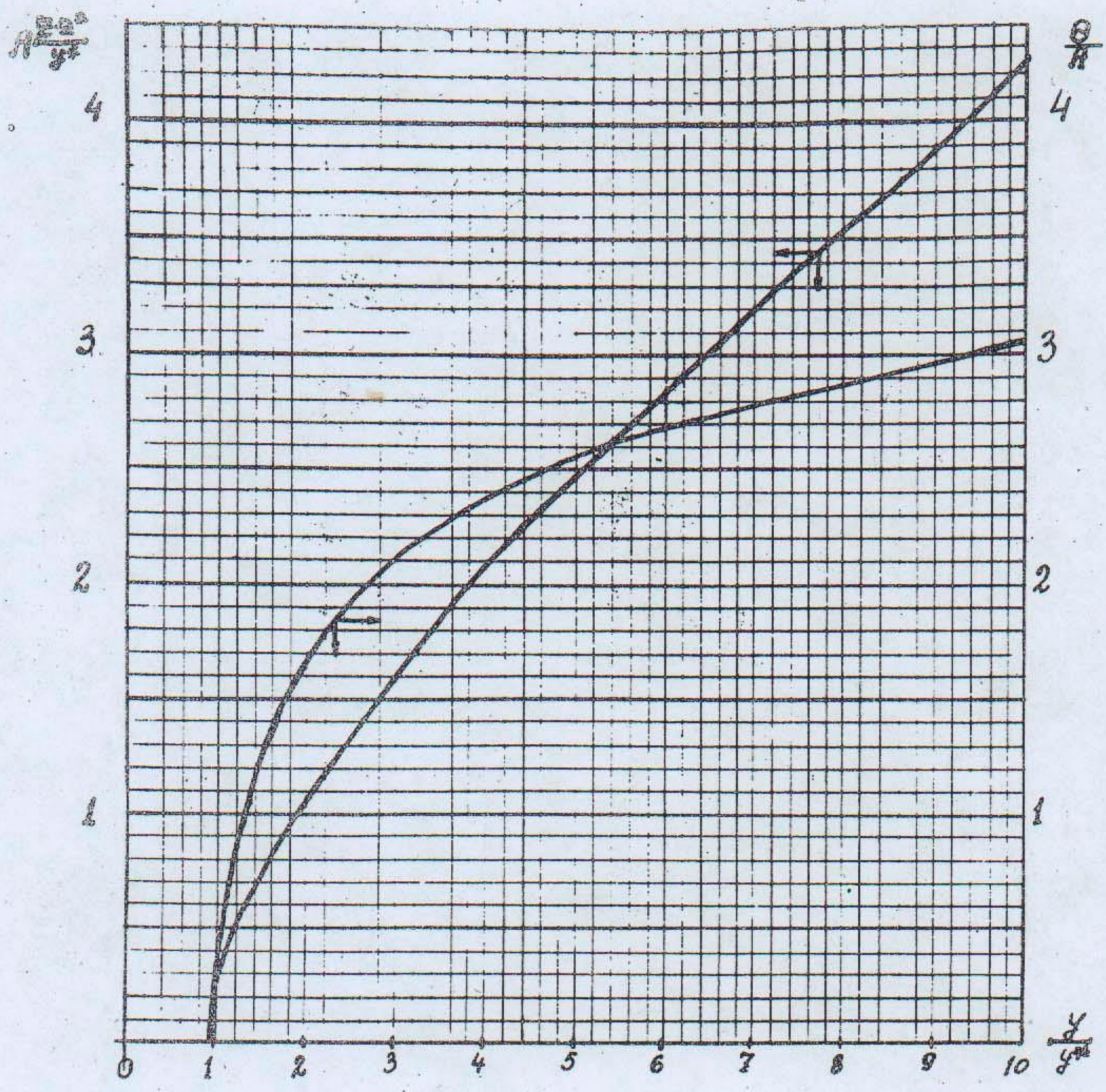
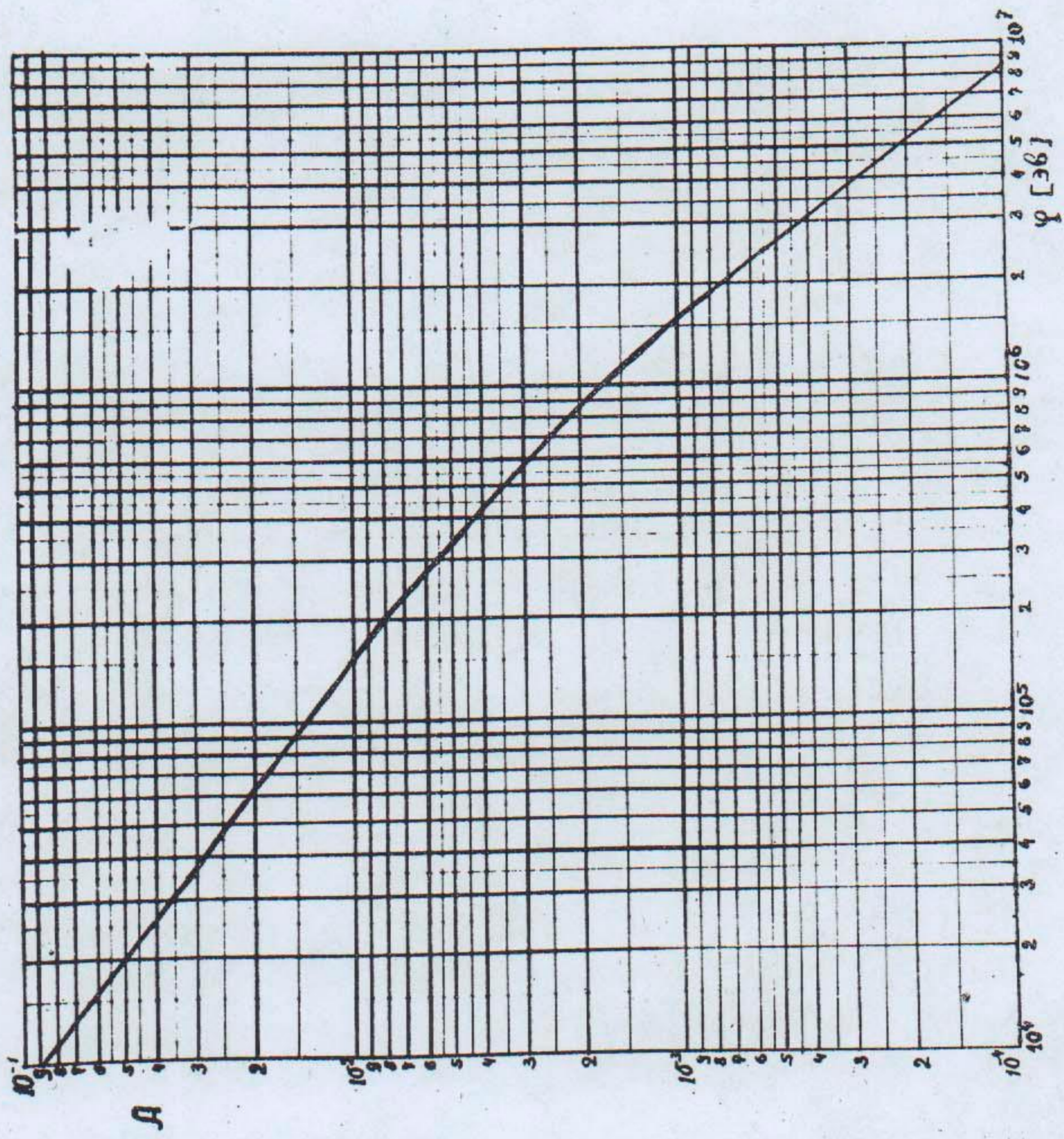


Рис. 3

Рис. 3. Универсальные кривые для расчёта движения пучка без ускорения с учётом пространственного заряда:  $y^*$  — наименьший размер пучка;  $z^*$  — положение  $y^*$ ;  $\theta = \frac{dy}{dz}$ ;  $A = \sqrt{J} [\psi(\psi+2)]^{-3/4}$ , см. рис. 4.



$$A = \sqrt[3]{\varphi(\varphi+2)}^{-3/4}$$

Рис. 4. График зависимости  $A(\varphi)$  для  $I = 1$  ампер:

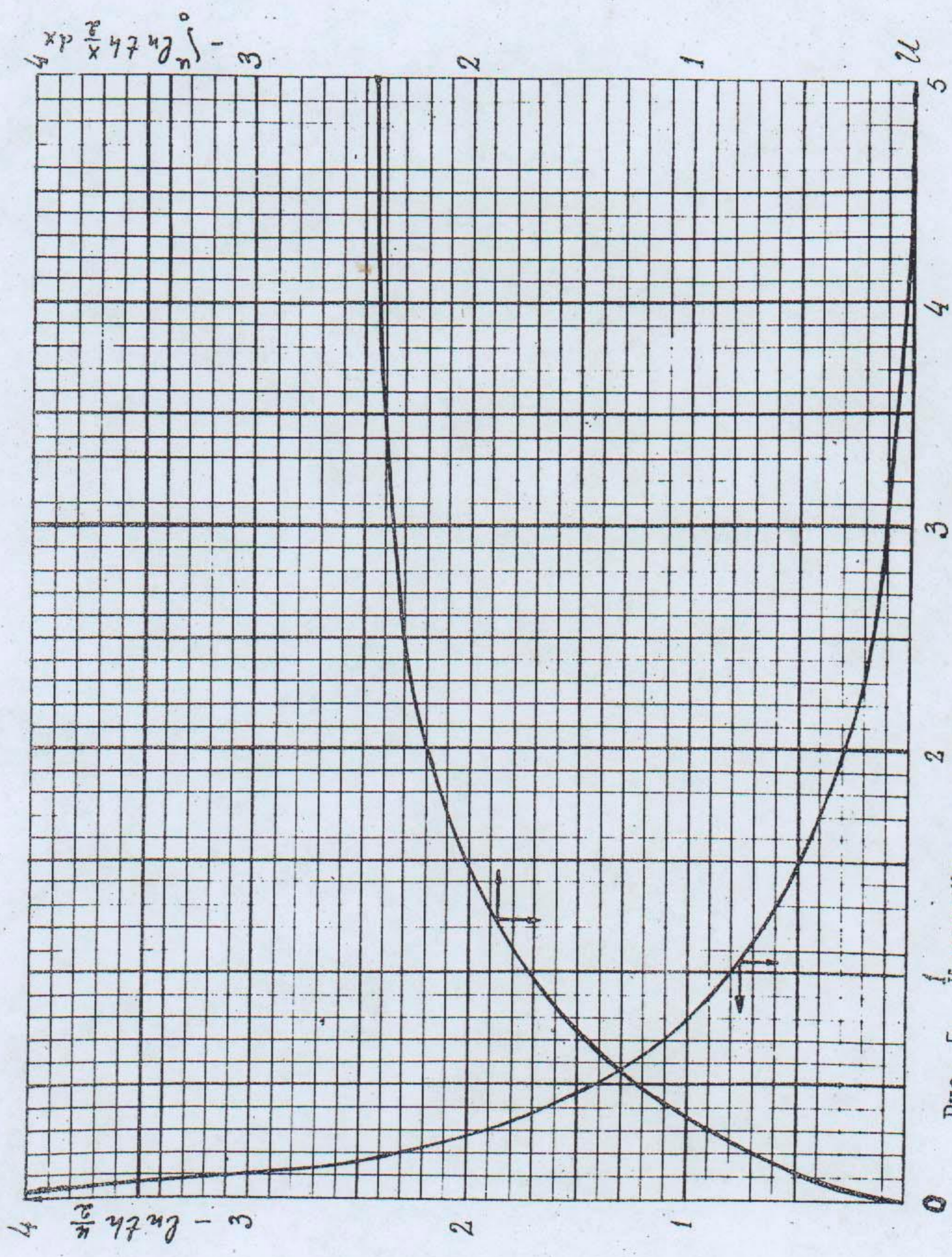


Рис. 5. К расчёту движения пучка в однородном ускоряющем поле с учётом пространственного заряда в линейном приближении (3.3)

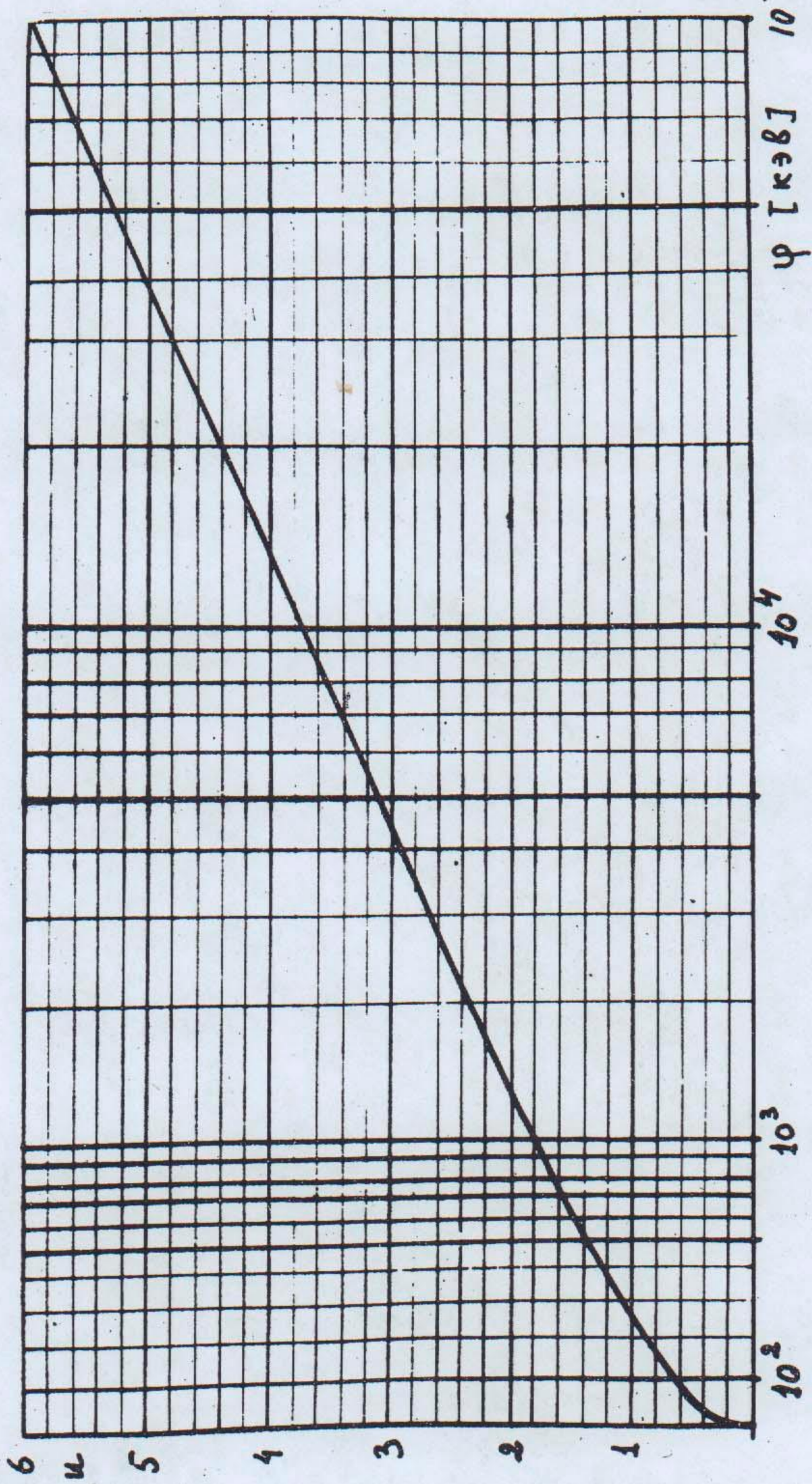


Рис. 6. Зависимость  $U(\varphi)$  (1.5):  $U \approx \sqrt{2\varphi}$  при  $\varphi \ll 1$  (500кэВ)  
и  $U \approx \ln 2\varphi$  при  $\varphi \gg 1$ .

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н.С.Зинченко. Курс лекций по электронной оптике, Харьков, 1961.
2. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958г.
3. A.M.Clogston, H.Heffner, J. Appl. Phys., 25, 437, (1959).
4. Ping King Tien, J. Appl. Phys., 25, 1281, (1959).
5. Е.Янке, Ф.Эмде, Таблицы функций, Физматгиз, 1959.

Ответственный за выпуск Г.Б.Глаголев

Подписано к печати *многоты* 23.03.65.

Формат бумаги 270x190, тираж 250 экз.

Бесплатно

---

Отпечатано на ротапринтере в Институте  
ядерной физики СО АН СССР.